Teoria operatorów nieograniczonych

Lista 2 (twierdzenie o odwzorowaniu otwartym, przykłady operatorów ograniczonych)

Zad 1 (Zasada jednostajnej ograniczoności)**.** Podzbiór $T \subset H$ przestrzeni Hilberta H nazywamy *słabo ograniczonym*, jeżeli

$$\forall_{h\in H}\ \exists_{\beta(h)>0}\ |(g|h)| \leq \beta(h) \text{ dla każdego } g \in T.$$

Innymi słowy, oznaczając przez $f_g : H \to \mathbb{C}$ funkcjonały $f_g(h) := (g|h)$ odpowiadające elementom $g \in T$, zbiór T jest słabo ograniczony jeśli zbiór funkcjonałów $\{f_g : g \in T\}$ jest ograniczony punktowo.

i) Pokazać, że zbiór T jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonały ograniczone $f_g : H \to \mathbb{C}$ odpowiadające elementom $g \in T$ są jednostajnie ograniczone, tzn.

$$\exists_{\beta>0}\forall_{h\in H}\quad |(g|h)| \leq \beta\|h\| \text{ dla każdego } g \in T.$$

ii) Pokazać, że jeżeli $\dim(H) < \infty$, to zbiór T jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo ograniczony

iii) Niech $\dim(H) = \infty$. Wykazać, że przy założeniu, iż zbiór T jest słabo ograniczony ale nie jest ograniczony, istnieje ciąg unormowanych wektrorów $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ i ciąg wektorów $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T$ takich, że e_{n+1} jest ortogonalny do wektorów $e_1, ..., e_n, g_1, ..., g_n$ oraz

$$|(g_{n+1}|e_{n+1})| \geq (n+1)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(e_k)}{k} + n + 1\right)$$

iv) Przy oznaczeniach z iii) policzyć $|(f|g_{n+1})|$ dla $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(e_k)}{k}$ i wysnuć stąd wniosek, że (w każdej przestrzeni Hilberta) zbiór T jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo ograniczony

Zad 2. Niech $A \in B(H)$. Pokazać, że nastepujące warunki są równoważne

i) A jest odwracalny,

ii) A^* jest odwracalny,

iii) obraz $\operatorname{Im} A$ operatora A jest gęsty w H oraz A jest operatorem ograniczonym z dołu. (Wskazówka: zauważyć, że $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$)

Zad 3 (Twierdzenie o operatorze odwrotnym)**.** Niech $A \in B(H)$.

i) Niech $\ker A = \{0\}$. Pokazać, że A jest ograniczony z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczony jest zbiór

$$T = \{h \in H : \|Ah\| = 1\}.$$

ii) Niech $\operatorname{Im} A^* = H$. Pokazać, że zbiór $T = \{h \in H : \|Ah\| = 1\}$ jest słabo ograniczony i stąd oraz zasady jednostajnej ograniczoności wysnuć wniosek, że operator A jest ograniczony z dołu.

iii) Pokazać, że operator A jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $A : H \to H$ jest odwracalne.

Zad 4 (Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym).

i) Pokazać, że jeżeli $P \in B(H)$ jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń $K \subset H$, to odwozorowanie $P : H \to K$ jest odwzorowaniem otwartym.

ii) Udowodnić, że operator $A \in B(H)$ będący odwzorowaniem surjektywnym jest odwzorowaniem otwartym.

Zad 5. Pokazać, że macierz nieskończona $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ taka, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty \tag{1}$$

definiuje operator ograniczony $a : \ell^2 \to \ell^2$ standarodwym wzorem, tzn. $a(x_1, x_2, ...) = (y_1, y_2, ...)$, gdzie

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Pokazać, że każdy operator $a \in B(\ell^2)$ jest zadany w powyższy sposób, dla pewnej macierzy, niekoniecznie spełniającej (1). Jak wygląda macierz odpowiadająca operatorowi sprzężonemu?

Zad 6. Pokazać, że widmo operatora $a : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ pokrywa się ze zbiorem wartości własnych macierzy odpowiadającej a.

Zad 7. Niech $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$. Udowodnić, że operator $a : L^2[a, b] \to L^2[a, b]$ zdefiniowany wzorem

$$(ax)(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

jest operatorem ograniczonym. Wyznaczyć operator do niego sprzężony.

Zad 8. Niech $H = L^2[a, b]$ i niech $a(t)$ będzie funkcją zespoloną ciągłą na odcinku $[a, b]$. Pokazać, że operator $A : H \to H$ mnożenia przez funkcję $a(t)$, tj. operator dany wzorem

$$(Af)(t) = a(t)f(t), \qquad f \in H,$$

jest ograniczony.

a) Wyznaczyć normę oraz operator do sprzężony do A.

b) Pokazać, że A jest operatorem normalnym. Kiedy A jest operatorem samosprzężonym, kiedy unitarnym, a kiedy operatorem rzutowym?

c) Kiedy operator A jest odwracalny? Wyznaczyć widmo $\operatorname{Sp} A$ operatora A.

Zad 9. Niech $H = \ell^2$ i niech $a = (a(1), a(2), ...)$ będzie ograniczonym ciągiem o wyrazach zespolonych. Pokazać, że operator $A : H \to H$ mnożenia przez ciąg a, tj. operator dany wzorem

$$(Ax)(n) = a(n)x(n), \qquad x \in H, \; n = 1, 2, ...$$

jest ograniczony.

a) Wyznaczyć normę oraz operator do sprzężony do A.

b) Pokazać, że A jest operatorem normalnym. Kiedy A jest operatorem samosprzężonym, kiedy unitarnym, a kiedy operatorem rzutowym?

c) Kiedy operator A jest odwracalny? Wyznaczyć widmo $\operatorname{Sp} A$ operatora A.